News

Modelli di crescita

di Emanuele Bottazzi

*Secondaria di 2° grado - **Matematica***

Scarica l'articolo in pdf: https://www.rizzolieducation.it/content/uploads/2021/05/modelli-di-crescita-ss2-tramontana.pdf

Cara lettrice, caro lettore,
spesso quando si parla del modo in cui cresce la popolazione umana si parla di crescita esponenziale. Dal punto di vista matematico, questo vuol dire che il numero di persone viventi si può descrivere in modo approssimato mediante una funzione della forma $f(t) = a\,e^{bt}$, dove t è una variabile indipendente che rappresenta il tempo, mentre a e b sono dei parametri da determinare in base al fenomeno studiato. Utilizzando i dati messi a disposizione da https://www.worldometers.info/world-population/world-population-by-year/ e utilizzando un foglio di calcolo si può verificare che la popolazione umana nella storia si può approssimare mediante la funzione $f(t) \approx 10^8\,e^{1,2t}$ (per comodità, il tempo t è misurato in millenni). Questo modello sovrastima la popolazione mondiale dal 1000 a.C. fino quasi al 2000 d.C. e dopo il 2000 la sottostima.

CRESCITE NON ESPONENZIALI

Il modello esponenziale è il più semplice **modello di crescita** e anche il primo a essere stato studiato. Però ci sono delle altre dinamiche di crescita che, inizialmente, possono risultare indistinguibili da quella esponenziale. Un esempio è la crescita logistica, che si ottiene supponendo che l'ambiente abbia una capacità di carico oltre la quale non riesce più a dare nutrimento e risorse alla popolazione che lo abita. La crescita logistica è descritta da funzioni del tipo $f(t)=c/a+e^{bt}$. Il parametro c indica la capacità di carico dell'ambiente, mentre a e b dipendono dalla popolazione studiata. Se la popolazione iniziale è inferiore alla capacità di carico dell'ambiente, aiutandosi con un grafico si può vedere che per tempi iniziali (che dipendono dai parametri a, b e c) la dinamica è simile a quella di una crescita esponenziale. Successivamente, la crescita della funzione logistica è molto più lenta di una esponenziale. Invece, per popolazioni iniziali già superiori alla capacità di carico dell'ambiente il modello logistico prevede una decrescita che per tempi iniziali sarà molto simile a quella esponenziale.

PREDE E PREDATORI

Cosa succede se anche la capacità di carico dell'ambiente cambia nel tempo, per esempio perché è espressa in funzione di una popolazione di prede che non è fissa, ma varia in base al numero di predatori? Per rispondere a questa domanda **Vito Volterra** e **Alfred Lotka** hanno sviluppato in modo indipendente un **modello matematico** che oggi porta il nome di entrambi. Per semplicità, pensiamo al fenomeno empirico osservato da Volterra: la variazione nella popolazione ittica nell'Adriatico. Durante la Prima Guerra Mondiale la pesca aveva rallentato, ma a sorpresa anche il numero di pesci era diminuito, contrariamente alle previsioni. Per spiegare questo fenomeno Volterra ipotizzò che la pesca riducesse in modo significativo solo il numero di pesci predatori. La carenza di predatori prodotta dalla pesca avrebbe quindi permesso alle loro prede di crescere. Invece con il diminuire della pesca il maggior numero di predatori avrebbe portato a una notevole diminuzione di quello delle prede. Questa dinamica è descritta in termini matematici dal modello di Lotka-Volterra.

LA DINAMICA CICLICA TRA PREDE E PREDATORI

In Internet sono disponibili molte **simulazioni** della dinamica preda-predatore prevista dal modello di Lotka-Volterra. Per esempio, su questa pagina è possibile scegliere la popolazione iniziale di prede e predatori e vedere un grafico che mostra le previsioni corrispondenti. Se il numero delle prede è sufficiente a sostenere una popolazione di predatori, si osserva un comportamento ciclico: dapprima la popolazione di predatori crescerà a scapito delle prede. Non appena il numero di predatori diventa troppo grande rispetto a quello delle prede, i predatori inizieranno a decrescere. Alla decrescita del numero dei predatori corrisponde una crescita del numero delle prede, che permetterà al ciclo di ricominciare anche in presenza di pochissimi predatori. Se questa dinamica ci sembra familiare è perché ci ricorda quella della **diffusione delle malattie**: esse sono i predatori, mentre gli organismi infettabili sono le prede. Quindi, anche se i modelli di diffusione delle malattie sono più complessi e si basano su ipotesi diverse, già un modello semplice come quello di Lotka-Volterra può aiutarci a capire come mai una malattia come il COVID-19 si ripresenti in più ondate successive, anche se a un certo punto potrebbe sembrare quasi sconfitta.

PER APPROFONDIRE

- Il modello esponenziale è chiamato anche malthusiano, in onore del demografo britannico **Thomas Robert Malthus**, che lo ha descritto per primo. Nel foglio Excel allegato è presentato un modello esponenziale per la crescita della popolazione mondiale.
  Scarica il file Excel
- Un confronto tra crescita esponenziale e logistica è proposto in quest'attività con GeoGebra della professoressa Alice Caraceni: https://www.geogebra.org/m/qxa3a9FG
- Sul sito MaddMaths! si può leggere una breve biografia di Vito Volterra: http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/focus/vito-volterra/
- Alla pagina http://www.ahahah.eu/trucs/pp/ è stato implementato un simulatore 2D di una popolazione di predatori (in rosso) e di prede (in blu). Ciascun animale si muove in modo casuale, quando un predatore incontra una preda la mangia. Inoltre predatori e prede hanno un tasso di natalità e un tasso di mortalità. Anche se il modello è all'apparenza più complesso di quello di Lotka-Volterra, le sue previsioni sulla dinamica delle due popolazioni sono analoghe.
- Per una breve introduzione ai modelli di diffusione delle malattie si possono consultare le dispense del professor Stefano Bonaccorsi dell'Università di Trento: https://bit.ly/2RlQpbn
- Un'analisi più approfondita e corredata di simulazioni numeriche è stata proposta dal dottor Paolo Caressa alla pagina https://github.com/pcaressa/note-epidemie/blob/master/epidemie.ipynb